

Рис. 17. Колебания колец с равномерно распределенными присоединенными массами

Поперечные колебания струны. Круговую частоту поперечных колебаний струны определяют по формуле

$$\rho_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}}, \quad (37)$$

где n — номер формы колебаний ($n = 1, 2, 3, \dots$); l — длина струны; H — усилие натяжения струны; m — масса единицы длины струны.

ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Значения круговых частот колебаний некоторых динамических систем приведены в табл. 2, а коэффициент податливости при изгибных колебаниях — в табл. 3.

Для колебаний, перпендикулярных к плоскости кольца (рис. 17, б), будем иметь

$$\rho_n = \frac{n(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + \frac{EJ_2}{GT}}} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{m}}, \quad (36)$$

где GT — жесткость сечения кольца на кручение; EJ_2 — жесткость сечения на изгиб относительно главной оси, лежащей в плоскости кольца. Остальные обозначения те же, что и в формуле (35).

КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ ВАЛОВ

ВАЛ С ОДНИМ ДИСКОМ

Понятие критической частоты вращения. Рассмотрим вал на двух опорах с диском посредине (рис. 1), вращающийся с угловой скоростью ω .

Для того чтобы выяснить, является ли вращение вала с прямолинейной осью устойчивым, предположим, что вал получил некоторое отклонение и центр тяжести диска стал двигаться по окружности радиуса y . Тогда на диск действуют центробежная сила и сила упругости

$$C = \omega^2 m y; \quad F = \frac{1}{\alpha} y,$$

где m — масса диска; α — прогиб среднего сечения вала от действия единичной силы для вала постоянного сечения

$$\alpha = \frac{l^3}{48EJ}.$$

Если $C < F$, то после отклонения вал снова вернется в первоначальное положение, т. е. прямолинейное положение оси является *устойчивым*.

В момент равновесия, т. е. в момент начала потери устойчивости, когда $C = F$, прогибы могут безгранично возрастать. В этом случае центробежные силы в отклоненном положении равны силам упругости, стремящимся вернуть вал в исходное состояние. Частоты вращения, при которых наступает равенство центробежных сил и сил упругости, называют *критическими*.

При критическом значении ω величина $C = F$, откуда

$$\omega_k^2 m y = \frac{1}{\alpha} y$$

или

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}}. \quad (1)$$

Критическая частота вращения в об/мин

$$n_k = \frac{30\omega_k}{\pi}.$$

Равенство центробежных сил и сил упругости имеет место при любой величине прогиба, так как в пределах применимости линейной теории обе указанные силы пропорциональны прогибам.

Можно представить, что при критической частоте вращения вал совершенно теряет жесткость на изгиб; даже малая сила может вызвать значительные прогибы.

Из равенства (1) следует, что критическая угловая скорость совпадает с круговой частотой поперечных (изгибных) колебаний вала. Этот вывод справедлив и в общем случае, если детали, закрепленные на валу, рассматривают как точечные массы.

Учет начального эксцентриситета центра тяжести диска. В практических задачах центр тяжести диска имеет некоторое смещение относительно своей геометрической оси и, следовательно, оси вала.

Для уменьшения этого эксцентриситета быстровращающиеся валы подвергаются балансировке, которая,

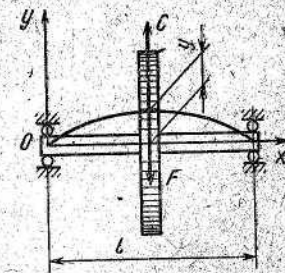


Рис. 1. Вал на двух опорах с диском посредине

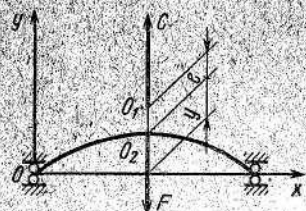


Рис. 2. Начальный эксцентриситет диска

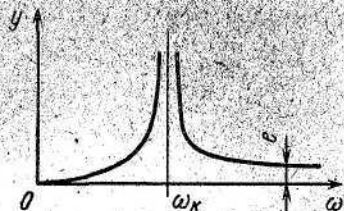


Рис. 3. Зависимость прогиба вала от угловой скорости

однако, имеет ограниченную точность. Например, детали весом 100—300 кгс балансируют обычно с точностью порядка 50—100 кгс·см. Кроме того, следует учесть, что в рабочих условиях вследствие нагрева, остаточных деформаций и других причин дисбаланс возрастает.

При наличии эксцентриситета вал получает прогибы даже при малой угловой скорости, так как к нему приложена неуравновешенная сила.

Обозначим абсолютную величину эксцентриситета диска e (величине e соответствует дисбаланс Ge , где G — вес диска).

На диск действуют сила инерции C и сила упругости F (рис. 2).

Предполагая величины y и e положительными, получим

$$C = \omega^2 m (y + e); \quad F = \frac{1}{\alpha} y. \quad (2)$$

Из условия равновесия следует $C = F$.

Подставляя в это равенство зависимости (2), находим

$$y = \frac{\omega \omega^2 m}{\frac{1}{\alpha} - \omega^2 m} = \frac{e}{\frac{\omega_k^2}{\omega^2} - 1}. \quad (3)$$

Если угловая скорость вращения ω меньше критической угловой скорости ω_k , то решение соответствует положительной величине y (направление прогиба и эксцентриситета совпадают, см. рис. 2).

При $\omega > \omega_k$ (закритический режим) величина $y < 0$ (направление эксцентриситета и прогиба противоположны). В закритической области центр тяжести диска расположен ближе к оси вращения, чем точка крепления диска к валу.

Из уравнения (3) следует, что при очень больших угловых скоростях ($\omega \rightarrow \infty$) $y = -e$, т. е. центр тяжести диска оказывается на оси вращения.

Такое явление называют *самоустановлением вала* в закритической области. Рассмотрим теперь критический режим, когда $\omega = \omega_k$.

Из уравнения (3) следует, что при совпадении угловой скорости с критической угловой скоростью прогибы вала неограниченно возрастают.

Зависимость прогиба вала от ω показана на рис. 3. Подобным образом возрастает и реакция на опоры.

В действительности прогибы при $\omega = \omega_k$ остаются конечными, так как всегда существуют ограничения (закрепление в подшипниках, трение и т. п.); и, кроме того, при больших деформациях нарушается линейная зависимость между силой и перемещением.

Однако приближение угловой скорости к критической может оказаться опасным, и поэтому зону частот вращения от $0,7 \omega_k$ до $1,3 \omega_k$ не рекомендуется использовать для рабочих режимов.

Во всех случаях желательно работать с жесткими роторами (валами), для которых $\omega < 0,7 \omega_k$.

Работа вала с одним диском при $\omega \geq \omega_k$ возможна, но при этом часто требуются специальные деформирующие опоры для прохождения через критические частоты

для успокоения вибрации в закритической области.

Если вал имеет несколько дисков и соответственно несколько критических угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, то критическое состояние наступает при совпадении угловой скорости с любой из критических скоростей.

Для устойчивой работы вала диапазон частот вращения

$$0,7\omega_i < \omega < 1,3\omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

рекомендуется исключить из рабочих режимов.

Для вала с несколькими дисками условия для устойчивой работы в закритической области ($\omega > \omega_k$) более благоприятны, чем для вала с одним диском.

Учет упругости опор. В действительных условиях опоры вовлекаются в колебания. Если пренебречь массой опоры, то в простейшем случае ее можно схематизировать в виде пружины (рис. 4).

Предположим для простоты, что опоры обладают одинаковой жесткостью. Для определения критических частот вращения следует рассмотреть равновесие системы при изогнутой оси вала. Центр тяжести диска будет перемещаться по окружности радиуса y , центры опор — по окружности радиуса y_0 .

Если α_0 — коэффициент податливости опоры в см/кгс, то

$$y_0 = \alpha_0 R.$$

Далее следует учесть равенства

$$C = \omega_k^2 m y; \quad (4)$$

$$C = \frac{1}{\alpha} (y - y_0). \quad (5)$$

где α — коэффициент податливости вала.

Так как $R = 0,5 C$, то из уравнения (5) следует

$$C = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} y. \quad (6)$$

Приравняв соотношения (4) и (6), находим

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\alpha}}} = \omega_{кж} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\alpha}}}, \quad (7)$$

$$\omega_{кж} = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}} \quad (8)$$

является критической угловой скоростью вала на жестких опорах.

Из формулы (7) следует, что поправка, связанная с учетом податливости опор, зависит от податливости вала.

Одни и те же опоры можно рассматривать как жесткие или как податливые в зависимости от жесткости вала. В практических конструкциях податливость опор составляет обычно $\alpha_0 = (5 + 20) \cdot 10^{-6}$ см/кгс, причем податливость подшипников вращения для вала диаметром 60—80 мм приблизительно равна $(1 + 3) \cdot 10^{-6}$ см/кгс.

При критических частотах вращения в валу возникают постоянные по времени напряжения, тогда как в опорах напряжения будут изменяться по времени, что способствует увеличению сил демпфирования.

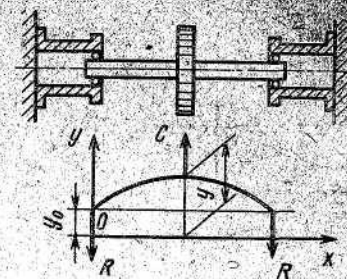


Рис. 4. Вал на упругих опорах

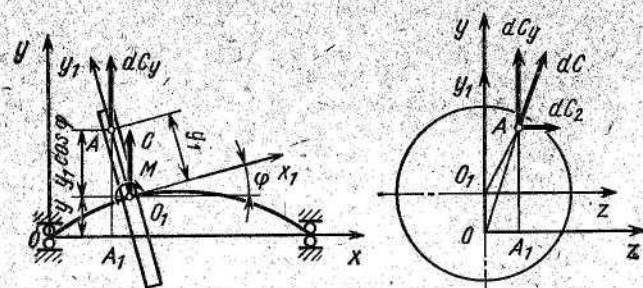


Рис. 5. Гироскопический эффект диска

В технике применяют конструкции, в которых относительно жесткий ротор закреплен на податливых опорах. В силу этого критическая частота может лежать в рабочем диапазоне ($\omega_k < \omega$), но, как показала практика, это не нарушает нормальную работу.

Прогибы ротора при критических частотах вращения всей системы оказываются малыми, если критическая частота вращения ротора на жестких опорах превышает максимальную ($\omega_{кж} > \omega$).

Учет гироскопического эффекта дисков. Рассмотрим центробежные силы, действующие на диск (рис. 5). Ось x является осью вращения, ось x_1 направлена по оси диска. Пусть элемент массы dm находится в точке A . К нему приложена центробежная сила dC , действующая в плоскости вращения, причем

$$dC = dm\omega^2 r,$$

где r — длина отрезка OA .

Центробежная сила dC может быть разложена на две составляющие dC_y и dC_z , но усилия dC_z вследствие симметрии образуют взаимно уравновешенную систему сил и для дальнейшего не существенны.

Усилие

$$dC_y = \omega^2 dm (y + y_1 \cos \varphi), \quad (9)$$

так как отрезок $AA_1 = y + y_1 \cos \varphi$ представляет собой проекцию отрезка OA на плоскость xy .

Приведем все нагрузки, действующие на диск, к силе C и паре сил M , приложенным в центре тяжести диска.

Сила

$$C = C_y = \int dC_y = \omega^2 \int (y + y_1 \cos \varphi) dm,$$

интеграл распространяется на весь объем диска.

Величины y (смещение центра тяжести) и φ (угол поворота плоскости диска) одинаковы для всех точек диска и могут быть вынесены из-под знака интеграла.

Тогда

$$C = \omega^2 y \int dm + \omega^2 \cos \varphi \int y_1 dm.$$

Учитывая, что

$$\int y_1 dm = 0,$$

как статический момент относительно прямой, проходящей через центр тяжести, получим

$$C = \omega^2 m y, \quad (10)$$

где m — масса всего диска.

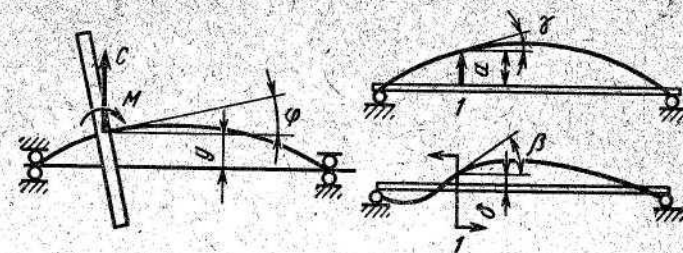


Рис. 6. Влияние гироскопического эффекта на критическую частоту вращения вала

Но центробежные силы создают еще и момент, который для рассматриваемого вида движения¹ (диск неподвижен относительно плоскости, содержащей изогнутую ось вала) может быть легко определен.

Этот момент называют *гироскопическим*.

$$M = \int dC_y y_1 \sin \varphi dm$$

или с учетом соотношения (9)

$$M = \omega^2 \int (y + y_1 \cos \varphi) y_1 \sin \varphi dm,$$

Последний интеграл разбивается на два:

$$M = \omega^2 y \sin \varphi \int y_1 dm + \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi \int y_1^2 dm,$$

из которых первый равен нулю.

Таким образом,

$$M = \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi J_m,$$

где $J_m = \int y_1^2 dm$ — осевой момент инерции, кгс·см·с².

Для тонких дисков $J_m = 0,5 J_p$.

Так как рассматриваются малые отклонения вала от прямолинейной формы, то $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$.

Момент, создаваемый диском,

$$M = \omega^2 J_m \varphi. \quad (11)$$

При малых углах поворота

$$\varphi \approx \frac{dy}{dx};$$

$$M = \omega^2 J_m \frac{dy}{dx}.$$

Существенно, что этот момент препятствует прогибу. Следовательно, с учетом гироскопического момента дисков критические числа оборотов повышаются.

Перейдем к определению критических частот вращения вала с одним диском с учетом гироскопического момента (рис. 6).

Это движение называют прямой синхронной прецессией. Возможны и другие более сложные движения вала, напоминающие движение гибкого валика во вращающейся трубчатой обойме. Такого рода движения на практике встречаются очень редко.

Под действием силы C и момента M вал в месте крепления диска прогибается на величину y и поворачивается на угол φ :

$$y = \alpha C - \delta M; \quad \varphi = \gamma C - \beta M, \quad (12)$$

где α и γ — прогиб и угол поворота от действия единичной силы; δ и β — прогиб и угол поворота от действия единичного момента.

Направление единичных силовых факторов показано на рис. 6. По условию взаимности упругих систем величины γ и δ численно равны.

Подставляя равенства (10) и (11) в уравнение (12), получим

$$y = \omega^2 \alpha m y - \omega^2 \gamma J_m \varphi;$$

$$\varphi = \omega^2 \gamma m y - \omega^2 \beta J_m \varphi$$

или

$$y(\omega^2 \alpha m - 1) - \varphi \omega^2 \gamma J_m = 0; \quad (13)$$

$$y \omega^2 \gamma m - \varphi(\omega^2 \beta J_m + 1) = 0. \quad (14)$$

Приравняв отношение y к φ из равенств (13) и (14), находим

$$\frac{\omega^2 \gamma J_m}{\omega^2 \alpha m - 1} = \frac{\omega^2 \beta J_m + 1}{\omega^2 \gamma m}$$

или

$$\omega^4 (\alpha \beta - \gamma^2) m J_m + \omega^2 (\alpha m - \beta J_m) - 1 = 0.$$

Из последнего уравнения получаем величину критической угловой скорости

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha m - \beta J_m) + \sqrt{\frac{1}{4}(\alpha m - \beta J_m)^2 + m J_m (\alpha \beta - \gamma^2)}}}. \quad (15)$$

Если $J_m = 0$, то получим известный результат

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}}.$$

Влияние гироскопического момента особенно существенно для дисков, расположенных вблизи опор.

Если вал имеет концевые опоры и несет несколько дисков, то повышение критических частот вращения вследствие влияния гироскопического эффекта дисков невелико.

Учет массы вала. В приближенных расчетах массу вала учитывают увеличением массы диска. Обычно к массе диска добавляют половину массы вала. Приближенный расчет допустим, если масса вала составляет не более 30% массы диска.

ВАЛ С НЕСКОЛЬКИМИ ДИСКАМИ

Рассмотрим определение критических частот вращения вала с двумя дисками (рис. 7). Гироскопическими моментами дисков пренебрегаем. Прогибы вала создаются двумя силами

$$C_1 = \omega^2 m_1 y_1; \quad C_2 = \omega^2 m_2 y_2. \quad (16)$$

Введем обозначения: α_{11} — прогиб в сечении 1—1 от единичной силы в том же сечении; $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ — прогиб в сечении 1—1 от единичной силы в сечении 2—2; α_{22} — прогиб в сечении 2—2 от единичной силы в том же сечении.

Запишем

$$y_1 = \alpha_{11} C_1 + \alpha_{12} C_2; \quad y_2 = \alpha_{21} C_1 + \alpha_{22} C_2.$$

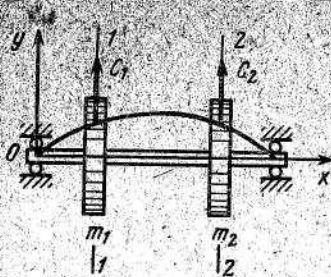


Рис. 7. Вал с двумя дисками

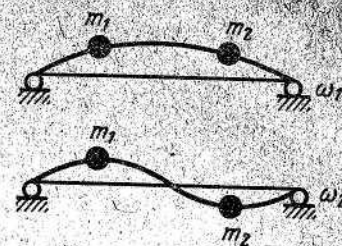


Рис. 8. Форма прогибов вала с двумя дисками при критических угловых скоростях

Подставляя равенства (16), находим

$$(\omega^2 \alpha_{11} m_1 - 1) y_1 + \omega^2 \alpha_{12} m_2 y_2 = 0;$$

$$\omega^2 \alpha_{21} m_1 y_1 + (\omega^2 \alpha_{22} m_2 - 1) y_2 = 0.$$

Приравняв отношения $\frac{y_1}{y_2}$ из последних уравнений, получаем

$$\omega^4 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2) - \omega^2 (\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2) + 1 = 0.$$

Отсюда находим две критические угловые скорости ω_1 и ω_2 :

$$\omega_1^2 = \frac{\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2 - \sqrt{(\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2)^2 - 4 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}}{2 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}; \quad (17)$$

$$\omega_2^2 = \frac{\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2 + \sqrt{(\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2)^2 - 4 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}}{2 m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}. \quad (18)$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (32) и (33) гл. 21, можно видеть, что критические угловые скорости совпадают с круговыми частотами поперечных колебаний². Этот вывод справедлив при произвольном числе масс. Вал, несущий n дисков, имеет такое же число критических скоростей.

Каждой критической скорости соответствует своя форма прогибов. Для вала с двумя дисками формы прогибов при первой и второй критических скоростях показаны на рис. 8.

ВАЛ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ МАССАМИ

Рассмотрим вал с непрерывно распределенными массами с концевыми шарнирными опорами (рис. 9).

Пусть $m(x)$ — масса единицы длины вала в сечении x .

Величина $m(x)$ должна учитывать как массу диска, так и массу вала.

Если, например, на участке вала длиной $\Delta l = 10$ см расположен диск весом 20 кгс, а вес самого вала в пределах участка 2 кгс, то

$$m(x) = \frac{20 + 2}{981 \cdot 10} = 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 / \text{см}^2.$$

Величину $m(x)$ принимаем постоянной на всем участке.

В изогнутом положении вала на него действует распределенная нагрузка

$$q(x) = \omega^2 m(x) y(x). \quad (19)$$

Критические скорости рассматриваются без учета влияния гироскопических моментов.

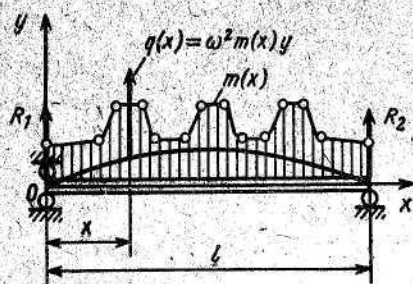


Рис. 9. Вал с распределенными массами

Перерезывающая сила в сечении

$$Q(x) = R_1 + \int_0^x q(x_1) dx_1,$$

где величина x_1 представляет собой переменную интегрирования ($0 \leq x_1 \leq x$). Так как изгибающий момент в сечении x и усилие $Q(x)$ связаны равенством

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx},$$

$$M(x) = \int_0^x Q(x_1) dx_1 = R_1 x + \int_0^x \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 dx_1. \quad (20)$$

Из условия равенства нулю изгибающего момента в сечении $x = l$ получаем

$$M(l) = R_1 l + \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 dx_1 = 0,$$

откуда

$$R_1 = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 dx_1.$$

Внося значение R_1 в формулу (20), находим

$$M(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 dx_1. \quad (21)$$

Полученное равенство выражает изгибающий момент в шарнирно опертой по концам балке при произвольной эпюре $q(x)$.

Для рассматриваемого случая $q(x)$ выражается равенством (19) и потому

$$M(x) = \omega^2 \left\{ \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 \right\}. \quad (22)$$

Последнее соотношение запишем в более краткой форме:

$$M(x) = \omega^2 A_y(x), \quad (23)$$

где

$$A_y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1. \quad (24)$$

Далее следует учесть основное уравнение изгиба вала

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)}, \quad (25)$$

где $EJ(x)$ — жесткость сечения вала на изгиб.

Принтегрировав обе части равенства в пределах от 0 до x , найдем

$$\frac{dy(x)}{dx} = \int_0^x \frac{M(x_1)}{EJ(x_1)} dx_1 + y'(0),$$

повторив операцию, получим

$$y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)x + y(0). \quad (26)$$

В рассматриваемом случае $y(0) = 0$, а из условия $y(l) = 0$ следует

$$\int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)l = 0$$

или

$$y'(0) = -\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1.$$

Подставив это равенство в уравнение (25), будем иметь

$$y(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{M(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1. \quad (27)$$

Это уравнение выражает прогибы вала при произвольном распределении изгибающего момента.

Если учесть соотношение (23), то уравнение (27) можно представить в следующей форме:

$$y = \omega^2 Ky, \quad (28)$$

где Ky — сокращенная запись интегральных операций (интегральный оператор):

$$Ky = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1. \quad (29)$$

Уравнение (28) представляет собой интегральное уравнение для определения критических угловых скоростей. Его решают методом последовательных приближений, причем в практических расчетах больше двух приближений не требуется (второе приближение — для контроля).

Исходное приближение $y_{(0)}$ можно выбрать в виде плавной кривой, удовлетворяющей условиям $y(0) = 0$ и $y(l) = 0$, например

$$y_{(0)}(x) = \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (30)$$

или

$$y_{(0)}(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}. \quad (31)$$

Окончательный результат не зависит от выбора исходного приближения. Следующее приближение для прогибов $y_{(1)}$ определяем в соответствии с равенством

$$y_{(1)} = \omega_{(1)}^2 Ky_{(0)}. \quad (32)$$

$Ky_{(0)}$ — означает, что величина $y_{(0)}$ должна быть внесена в соотношение (24), и затем после вычисления $A_j(x)$ следует определить интегралы, входящие в равенство (29). Интегралы определяем приближенно по правилу трапеций.

Первое приближение для определения критической угловой скорости находим из условия равенства исходного и последующего приближения

$$y_{(1)} = y_{(0)} \tag{33}$$

Это равенство (в приближенном расчете) не может быть справедливым для всех сечений, поэтому ограничиваются удовлетворением его лишь в сечении, где прогибы наибольшие.

В рассматриваемом случае можно принять в качестве такого сечения $x = l/2$ (середину пролета).

Тогда по соотношениям (32) и (33)

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{y_{(0)}}{Ky_{(0)}} \Big|_{x=l/2} \tag{34}$$

Для контроля можно привести еще одно приближение.

Величину $y_{(1)}$ вычисляем из соотношения (32), так как $\omega_{(1)}^2$ и $Ky_{(0)}$ известны. Величину $Ky_{(1)}$ определяем так же, как $Ky_{(0)}$, но функцию y_0 заменяем $y_{(1)}$. Значение ω_2 находим из равенства

$$\omega_{(2)}^2 = \frac{y_{(1)}}{Ky_{(1)}} \Big|_{x=l/2} \tag{35}$$

Так определяют первую (наименьшую) критическую угловую скорость.

Расчетные сечения нужно выбирать так, чтобы были отражены резкие изменения в распределении масс и жесткостей системы (см. рис. 9).

Пример. Требуется определить первое критическое число оборотов ротора центробежного компрессора. Основные данные: мощность $N = 15\,300$ кВт; производительность $Q = 160\,000$ м³/ч; давление $p = 10$ кгс/см²; частота вращения вала $n = 3000$ об/мин.

Эскиз ротора показан на рис. 10. Расчет ведем по форме табл. 1. Вал разбит на расчетные сечения. В графе 1 даны расстояния сечения до левой опоры, в графе 2 — величины

$$\frac{1}{2} \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

В графы 3 и 4 заносят значения $m(x)$ — массы на единицу длины вала и $EJ(x)$ — жесткости сечения на изгиб.

В графу 5 вписывают величины $y_{(0)}(x)$, полученные по равенству (31).

В графе 6 записывают произведения чисел, стоящих в графах 3 и 5.

Далее вычисляем полусумму значений $my_{(0)}$ для сечения i и следующего $i+1$ и умножаем на величину $\frac{1}{2} \Delta x_i$; результат заносят в эту же строку.

В соответствии с этим в первой строке графы 7 стоит $(0 + 0,002534) \cdot 15$, во второй строке $(0,002534 + 0,01772) \cdot 25$.

Числа, помещенные в этой графе, представляют собой по физическому смыслу площади отдельных трапеций, на которые разбивается интегрируемая площадь.

Интеграл $\int_0^x my_{(0)} dx$ представляет собой сумму значений, стоящих в графе 7, взятую с нарастающим итогом. При $x = 0$ этот интеграл также равен нулю (оба предела интегрирования совпадают).

Далее интегрируют функции

$$f = \int_0^x my_{(0)} dx.$$

В последней строке графы 10 стоит значение

$$\int_0^l \int_0^l m(x_2) y_{(0)}(x_2) dx_2 dx_1$$

1. Расчет критических оборотов ротора центробежного компрессора

x_i , см	$\frac{1}{2} \Delta x_i$, см	$m(x)$, кгс·см/см	$EJ(x) \times 10^{-12}$	$y_0(x)$	$m(x) y_0(x)$	$[\frac{1}{2} \Delta x_i + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1}] \times \frac{1}{2} \Delta x_i$	$\int_0^x m(x) y_0(x) \times (x_1) dx_1$	$[\frac{1}{2} \Delta x_i + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1}] \times \frac{1}{2} \Delta x_{i+1}$	$\int_0^l \int_0^l m(x_2) y_0(x_2) \times (x_2) dx_2 dx_1$
0	15,0	0,0040	0,045	0	0	0,0380	0	0,570	0
30	25,0	0,00976	0,251	0,260	0,00253	0,506	0,0380	14,56	0,570
80	15,0	0,0293	0,283	0,606	0,0177	0,584	0,5443	25,08	15,13
110	20,0	0,0279	0,313	0,761	0,0212	0,897	1,128	65,06	40,21
150	15,0	0,0260	0,293	0,908	0,0236	0,707	2,025	71,31	103,8
180	17,5	0,0241	0,293	0,973	0,0235	0,845	2,732	110,4	174,6
215	20,0	0,0248	0,305	1,000	0,0248	0,958	3,577	162,2	285,0
255	15,0	0,0239	0,313	0,965	0,0231	0,668	4,535	146,0	447,2
285	12,5	0,0239	0,306	0,894	0,0214	0,521	5,202	136,6	593,2
310	12,5	0,0252	0,297	0,805	0,0203	0,447	5,724	149,7	729,8
335	12,5	0,0224	0,278	0,688	0,0154	0,346	6,171	158,6	875,5
360	10,0	0,0224	0,264	0,545	0,0122	0,198	6,516	131,9	1037
380	7,0	0,0088	0,204	0,411	0,00361	0,0412	6,674	99,72	1169
384	6,0	0,0074	0,147	0,307	0,00228	0,0220	6,715	30,71	1263
406	12,0	0,0066	0,116	0,211	0,00138	0,0167	6,737	162,0	1393
430	—	0,0040	0,046	0	0	—	6,754	—	1505

Продолжение табл.

5, см	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	105,0	104,4	-415,7	-0,006235	-0,00623	-0,09952	-0,0835	6,68	6,48	0
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	279,9	264,8	-986,1	-0,03054	-0,04002	-1,156	-1,249	17,54	16,29	6,48
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	384,8	344,6	-1100	-0,05076	-0,07056	-1,659	-2,908	24,11	21,20	16,29
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	524,8	421,5	-1438	-0,04486	-0,1213	-3,337	-6,745	32,88	26,13	21,20
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	629,8	485,2	-1553	-0,05402	-0,1662	-4,312	-11,06	39,46	28,40	26,13
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	762,3	467,3	-1584	-0,05916	-0,2202	-5,762	-17,82	47,15	29,33	28,40
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	892,3	445,1	-1424	-0,04117	-0,2794	-8,498	-27,82	55,91	28,10	29,33
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	997,2	404,0	-1321	-0,03169	-0,3205	-8,409	-36,81	62,48	25,67	28,10
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	1084	354,2	-1214	-0,02839	-0,3522	-9,160	-45,22	67,97	22,74	25,67
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	1172	293,5	-1087	-0,02375	-0,3806	-9,811	-54,38	73,45	19,07	22,74
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	1280	223,0	-843,2	-0,01631	-0,4043	-8,250	-64,19	78,93	14,74	19,07
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	1330	161,0	-787,6	-0,01098	-0,4207	-5,966	-72,44	85,31	10,87	14,74
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	1378	115,0	-781,8	-0,008667	-0,4316	-5,231	-78,40	86,38	7,98	10,87
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	1420	77,0	-662,7	-0,007952	-0,4403	-10,86	-83,64	89,01	5,37	7,98
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$	1505	0	0	-0,007952	-0,4483	-	-94,30	94,3	0	5,37
$\int_0^x \int_0^x \rho \omega^2 dx_1 dx_2$										0

$\omega_1 = 184,6$ рад/с; $n_1 = 1764$ об/мин; $\omega_2 = 187,1$ рад/с; $n_2 = 1788$ об/мин.

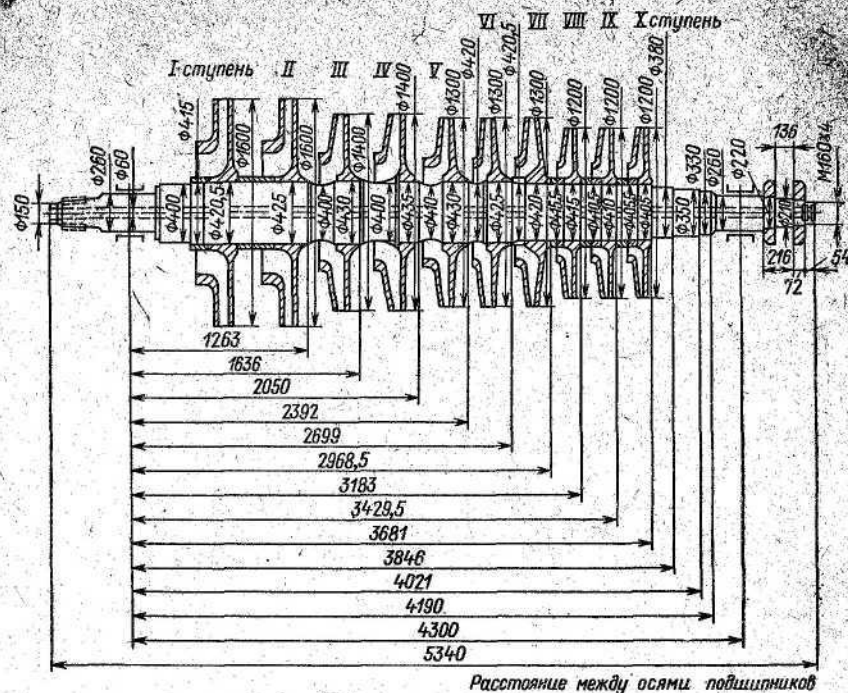


Рис. 10. Схема вала компрессора

Затем в соответствии с формулой (24) вычисляем $A_y(x)$.
 Для определения $Ky_{(0)}$ по формуле (29) величину делим на $EJ(x)$ (графа 13) и далее вычисляем интегралы

$$\int_0^x \frac{A_y}{EJ} dx_1 \text{ и } \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{A_y}{EJ} dx_2 dx_1.$$

Первое приближение для критической угловой скорости

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{1}{29,33 \cdot 10^{-6}}; \omega_{(1)} = 184,6 \text{ рад/с.}$$

В этом равенстве величины $y_{(0)}$ и $Ky_{(0)}$ взяты в сечении $x = 215$, где величина $y_{(0)}$ наибольшая.

Далее находим значения

$$y_{(1)} = \omega_{(1)}^2 Ky_{(0)} = \frac{Ky_{(0)}}{Ky_{(0)} \max}$$

Следующее приближение проводим таким же образом, но вместо $y_{(0)}$ вносим функцию $y_{(1)}$.
 Получаем $\omega_2 = 187,1$ рад/с.

Общий случай определения критической угловой скорости. Рассмотрим вал (ротор) переменного сечения (рис. 11) на двух шарнирных опорах, нагруженный произвольно распределенными массами и моментами инерции.

Массу, приходящуюся на единицу длины вала, обозначим $m(x)$, момент инерции на единицу длины вала $J_m(x)$.

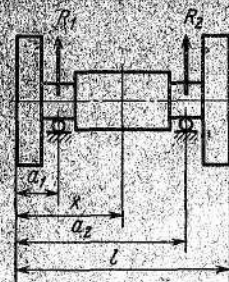


Рис. 11. Общий случай расчета критических частот вращения двухопорного вала

В соответствии с формулами (10) и (11) на участок dx вала будет действовать внешнее усилие

$$dC = \omega^2 m(x) y(x) dx$$

и момент

$$dM = \omega^2 J_m(x) y'(x) dx.$$

Перерезывающая сила в сечении x

$$Q(x) = \omega^2 \int_0^x m(x_1) y(x_1) dx_1 + S(x, a_1) R_1 + S(x, a_2) R_2, \quad (36)$$

где

$$S'(x, a_1) = 0 \text{ при } x < a_1;$$

$$S(x, a_1) = 1 \text{ при } x \geq a_1;$$

$$S(x, a_2) = 0 \text{ при } x \leq a_2;$$

$$S(x, a_2) = 1 \text{ при } x > a_2.$$

Введение единичных разрывных функций $S(x, a_1)$ и $S(x, a_2)$ значительно упрощает схему расчета, так как позволяет записать в единой для всего вала аналитической форме выражения для перерезывающей силы и изгибающего момента.

Изгибающий момент в сечении

$$M(x) = \omega^2 \left\{ \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 + \int_0^x J_m(x_1) y'(x_1) dx_1 \right\} + S(x, a_1) R_1 (x - a_1) + S(x, a_2) R_2 (x - a_2). \quad (37)$$

Равенства (36) и (37) запишем в более краткой форме

$$Q(x) = \omega^2 A_{1y}(x) + S(x, a_1) R_1 + S(x, a_2) R_2; \quad (38)$$

$$M(x) = \omega^2 A_{2y}(x) + S(x, a_1) R_1 (x - a_1) + S(x, a_2) R_2 (x - a_2), \quad (39)$$

где

$$A_{1y}(x) = \int_0^x m(x_1) y(x_1) dx_1; \quad (40)$$

$$A_{2y}(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} m(x_2) y(x_2) dx_2 dx_1 + \int_0^x J_m(x_1) y'(x_1) dx_1. \quad (41)$$

Из краевых условий

$$Q(l) = 0 \text{ и } M(l) = 0$$

получаем с помощью равенств (38) и (39)

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \omega^2 \frac{1}{a_2 - a_1} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)]; \\ R_2 &= \omega^2 \frac{1}{a_2 - a_1} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)]. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Теперь, учитывая равенства (42), запишем соотношение (39) в виде

$$M(x) = \omega^2 A_y(x), \quad (43)$$

причем

$$A_y(x) = A_{2y}(x) + S(x, a_1) \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)] + S(x, a_2) \frac{x - a_2}{a_2 - a_1} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)]. \quad (44)$$

Уравнения (25) и (26) сохраняют силу. Используя зависимости (26) и (43) получаем

$$y(x) = \omega^2 \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)x + y(0). \quad (45)$$

Из условий

$$y(a_1) = 0; \quad y(a_2) = 0 \quad (46)$$

получаем систему двух уравнений для нахождения $y'(0)$ и $y(0)$:

$$\omega^2 \int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)a_1 + y(0) = 0; \quad (47)$$

$$\omega^2 \int_0^{a_2} \int_0^{x_2} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0)a_2 + y(0) = 0. \quad (48)$$

Определяя из этих уравнений $y'(0)$ и $y(0)$ и внося их в формулу (45), получаем основное расчетное уравнение

$$y = \omega^2 Ky, \quad (49)$$

где

$$Ky = \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + \frac{x}{a_2 - a_1} \left[\int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - \int_0^{a_2} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 \right] + \frac{1}{a_2 - a_1} \left[a_1 \int_0^{a_2} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - a_2 \int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 \right]. \quad (50)$$

Для расчета требуется значение $y'(x)$. Его вычисляем по формуле

$$y' = \omega^2 K'y, \quad (51)$$

где

$$\frac{d}{dx} (Ky) = K'y = \int_0^x \frac{A_y(x_1)}{EJ(x_1)} dx_1 + \frac{1}{a_2 - a_1} \left[\int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 - \int_0^{a_2} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 \right]. \quad (52)$$

Уравнение (49) решаем методом последовательных приближений. В качестве исходного приближения можно выбрать

$$y_{(0)}(x) = C(x - a_1)(x - a_2). \quad (53)$$

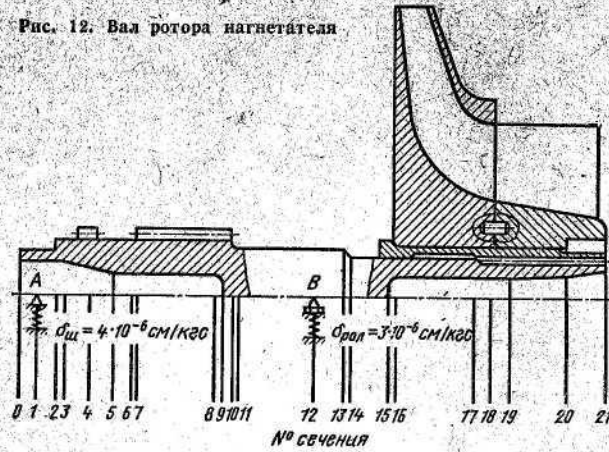
Постоянная C не существенна для расчета. Для единообразия вычислений ее можно определить из условия

$$y_{(0)\max} = 1.$$

Если, например, наибольшее значение $y_{(0)\max}$ при $x = \frac{l}{2}$, то

$$C = \frac{1}{\left(\frac{l}{2} - a_1\right)\left(\frac{l}{2} - a_2\right)}.$$

Рис. 12. Вал ротора нагнетателя



В окончательной форме

$$y_{(0)}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{\left(\frac{l}{2}-a_1\right)\left(\frac{l}{2}-a_2\right)}; \tag{54}$$

$$y'_{(0)}(x) = \frac{2x-a_1-a_2}{\left(\frac{l}{2}-a_1\right)\left(\frac{l}{2}-a_2\right)}.$$

Величины $y_{(0)}(x)$ и $y'_{(0)}(x)$ должны быть подставлены в соотношения (40), (41) и далее в (44) и (50). В результате находим $Ky_{(0)}$, после чего величину $\omega_{(1)}^2$ определяем из равенства

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{y_{(0)}}{Ky_{(0)}} \Big|_{x=x_m},$$

где x_m — абсцисса сечения, в котором величина $Ky_{(0)}$ имеет наибольшее значение; часто это сечение является одним из концевых сечений вала $x_m = 0$; $x_m = l$ или серединой пролета $x_m = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$.

Если требуется определить второе приближение, то вычисляют величину

$$y_{(1)} = \omega_{(1)}^2 Ky_{(0)},$$

И далее с помощью равенства (52)

$$y'_{(1)} = \omega_{(1)}^2 K' y_{(0)}. \tag{55}$$

Никаких новых вычислений для определения $y'_{(1)}$ в сущности не требуется, так как все входящие в равенство (52) величины имеются в расчетной таблице.

Пример. Определять первую критическую частоту вращения ротора турбомашины, расчетная схема которого показана на рис. 12. Расчет сведен в табл. 2.

Первое приближение для прогиба $y_{(0)}(x)$ определялось по формуле (53). Сначала были вычислена величина $(x - 0,65) \times (x - 11,45)$, которая имела наибольшее значение при $x = 22,80$ и разделен на это наибольшее значение, получили $y_{(0)}(x)$ (графа 5).

В графе 9 указана производная $y'_{(0)}(x)$, полученная дифференцированием

$$y'_{(0)}(x) = \frac{2x - 12,1}{(x - 0,65)(x - 11,45)}.$$

2. Расчет критических частот вращения ротора нагнетателя

Сечение (рис. 12)	x , см	$\frac{1}{2} \Delta x$, см	$m(x) \cdot 10^6$ кгс·см ² /см ²	$EI(x) \cdot 10^{-6}$	$y_0(x)$	$A_{1y}(x) = \int_0^x m(x_1) \times y_0(x_1) \times dx_1 \cdot 10^6$	$\int_0^{x_1} \int_0^0 m(x_2) \times y_0(x_2) \times dx_2 dx_1 \cdot 10^6$	$J_m(x) \cdot 10^6$	$y'_0(x)$	$x \int_0^x J_m(x_1) \times y'_0(x_1) \times dx_1 \cdot 10^6$	$A_{1y}(x) \cdot 10^6$
1	0	0,325	0,0966	11,8	0,0296	0	0	0	-0,0481	0	0
2	0,65	0,400	0,0966	11,8	0	0,000929	0,000302	0	-0,0430	0	0,000302
3	1,45	0,150	0,130	28,4	-0,0818	-0,000731	0,000381	0	-0,0366	0	0,000381
4	1,75	0,500	0,0746	28,6	-0,0424	-0,00183	-0,0000024	0	-0,0342	0	-0,0000024
5	2,75	0,302	0,102	43,7	-0,0727	-0,00714	-0,00448	0	-0,0262	0	-0,00448
6	3,30	0,350	0,0947	31,4	-0,0908	-0,0154	-0,0158	0	-0,0179	0	-0,0158
7	4,50	0,100	0,0947	31,4	-0,106	-0,0222	-0,0229	0	-0,0128	0	-0,0229
8	7,70	0,180	0,126	51,8	-0,109	-0,0648	-0,0377	0	-0,0107	0	-0,0377
9	8,00	0,200	0,142	52,4	-0,101	-0,0689	-0,168	0	0,0155	0	-0,168
10	8,40	0,100	0,142	52,4	-0,0940	-0,0745	-0,188	0	0,0187	0	-0,188
11	8,60	1,421	0,121	52,4	-0,0901	-0,0769	-0,216	0	0,0203	0	-0,216
12	14,45	0,625	0,0770	15,5	0	-0,0924	-0,473	0	0,0430	0	-0,473
13	12,70	0,40	0,0770	15,5	0,0599	-0,0895	-0,586	0	0,0529	0	-0,586
14	12,90	0,70	0,0640	15,5	0,0706	-0,0887	-0,604	0	0,0545	0	-0,604
15	14,30	0,10	0,339	7,29	0,156	-0,0493	-0,701	0	0,0655	0,113	-0,701
16	14,50	1,69	0,323	6,61	0,168	-0,0493	-0,710	2,47	0,0672	0,146	-0,710
17	17,70	0,30	0,323	6,61	0,424	0,267	-0,344	2,47	0,0927	0,177	0,267
18	18,30	0,40	0,319	5,66	0,481	0,364	-0,197	2,47	0,0974	0,917	0,364
19	19,10	1,05	0,319	5,66	0,561	0,488	-0,180	2,47	0,104	1,12	0,488
20	21,20	0,80	0,314	5,13	0,797	0,939	1,68	2,47	0,120	1,70	1,68
21	22,80	—	0,305	3,92	1,000	1,38	3,53	2,47	0,133	2,21	3,53

Равенство (57) можно представить в виде

$$K_2 y = Ky - \beta_1 y_1, \quad (60)$$

где коэффициент

$$\beta_1 = \frac{\int_0^l m y_1 K y dx}{\int_0^l m y_1^2 dx}. \quad (61)$$

Такая структура формулы (60) объясняется тем, что форма прогибов, соответствующая второй критической скорости, должна удовлетворять условию ортогональности

$$\int_0^l y_1(x) y_2(x) m(x) dx = 0. \quad (62)$$

Слагаемое $\beta_1 y_1$ в формуле (60) «очищает» оператор Ky от составляющей по первой форме.

При определении третьей критической угловой скорости приходится обеспечить условие ортогональности не только по отношению к первой форме, но и ко второй.

Рассчитывают прогибы по уравнению

$$y = \omega^2 K_3 y, \quad (63)$$

где

$$K_3 y = Ky - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2, \quad (64)$$

причем значение β_1 находят из равенства (61), а

$$\beta_2 = \frac{\int_0^l m y_2 K y dx}{\int_0^l m y_2^2 dx}. \quad (65)$$

Исходное приближение целесообразно выбрать так, чтобы оно кроме точек закрепления содержало бы два узла.

Подобным способом можно определить более высокие критические скорости. Однако для определения третьей критической скорости необходима повышенная точность расчета, а расчет четвертой и пятой скоростей практически затруднителен.

В большинстве конструкций определение этих критических скоростей не требуется, так как они лежат далеко за пределами рабочих оборотов.

Перейдем к определению высоких критических угловых скоростей с учетом влияния гироскопических моментов дисков.

При определении второй критической скорости следует принять во внимание условие ортогональности в таком виде:

$$\int_0^l [m(x) y_1(x) y_2(x) - J_m(x) y_1'(x) y_2'(x)] dx = 0, \quad (66)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — формы прогибов при первой и второй критических скоростях.

Расчет ведем по уравнению (56), выражение для $K_2 y$ дано равенством (60) и принимаем

$$\beta_1 = \frac{\int_0^l (m y_1 K y - J_m y_1' K' y) dx}{\int_0^l [m y_1^2 - J_m (y_1')^2] dx}. \quad (67)$$

В этом равенстве $K'_y = \frac{d}{dx}(Ky)$, которое находят по формуле (52). Третью критическую скорость рассчитывают по уравнению (63), причем значение β_1 берут по формуле (67), а

$$\beta_2 = \frac{\int_0^l (m y_2 K y - J_m y_2' K' y) dx}{\int_0^l [m y_2^2 - J_m (y_2')^2] dx}. \quad (68)$$

При очень сильном влиянии гироскопического момента дисков (например, при расположении дисков вблизи опор) может случиться, что при решении уравнения (49) расчет сходится к первой форме $y_1(x)$, но соответствующая ей угловая скорость оказывается мнимой ($\omega_1^2 < 0$). В этом случае нужно перейти к расчету второй критической скорости, используя, как обычно, условие ортогональности по отношению к полученной форме прогибов $y_1(x)$.

Вторая расчетная критическая скорость будет для такой системы первой действительной критической скоростью, с которой только и нужно считаться в дальнейшем.

Пример. Определить вторую критическую частоту вращения ротора центробежного компрессора (по данным примера на стр. 440). Расчет сведен в табл. 3. Исходное приближение определено по формуле (58)

$$y_{(0)}(x) = Cx(x-l) \left(x - \frac{l}{2}\right).$$

Наибольшее значение $y_{(0)}(x)$ получилось в сечении $x = 335$. Определив C из условия

$$y_{(0)}(x)_{\max} = 1,$$

получим значения $y_{(0)}(x)$, указанные в графе 2. Для расчета используем уравнение (57), $Ky_{(0)}$ вычисляем из равенства (29), расчет отличается от первого примера только другой функцией $y_{(0)}(x)$. Значение $Ky_{(0)}$ дано в графе 9. В графу 10 заносим форму прогибов, соответствующую первой критической скорости (графа 20, табл. 1). Далее вычисляем β_1 по формуле (61)

$$\beta_1 = \frac{-36,49 \cdot 10^{-7}}{5,42} = -6,73 \cdot 10^{-7}.$$

Величина $K_2 y$ дана в графе 14.

Первое приближение для второй критической скорости

$$\omega_1^2 = \frac{y_{(0)}(x)}{K_2 y_{(0)}} \Big|_{x=x_m} = \frac{0,957}{17,55 \cdot 10^{-7}} = 0,545 \cdot 10^8 \text{ рад}^2/\text{с}^2,$$

так как наибольшее значение $K_2 y_{(0)}$ получилось в сечении $x = 360$ см.

Значение $\omega_{(1)} = 758$ рад/с и соответствующее значение $n_{(1)} = 7050$ об/мин.

В графе 15 приведено первое приближение для формы прогибов при второй критической скорости. Оно может быть получено из графы 14 делением на наибольшее значение $K_2 y_{(0)}$. Второе приближение определяют так же, но вместо $y_{(0)}(x)$ вносят $y_{(1)}(x)$ (графа 15).

В результате расчета получаем $n_{(2)} = 7120$ об/мин.

Расчет критических частот вращения с учетом упругости опор. Во многих практических задачах при расчете критических частот вращения роторов приходится учитывать упругость опор. Для роторов быстроходных машин с успехом применяют специальные упругие опоры, которые дают возможность перевести критические скорости в зону малых оборотов, неиспользуемых при рабочих режимах. Упругие опоры позволяют изолировать корпус от вибраций ротора и снизить нагрузки на подшипник¹.

¹ Полное устранение радиальной нагрузки на опору нежелательно, так как при этом в подшипниках качения режим качения может смениться режимом скольжения, приводящим к интенсивному износу.

4. Размеры (мм) упругого кольца (см. рис. 14)

D_1	D_2	Число выступов n	δ_{\max}	b_1	R	D_1	D_2	Число выступов n	δ_{\max}	b_1	d
55	58	4	0,165	5	10	125	128	10	0,305	6	15
		6	0,152					12	0,194		
58	61	4	0,120			129	132	10	0,350		
		6	0,170					12	0,210		
60	63	4	0,130			134	137	10	0,370		
		6	0,180					12	0,230		
65	68	4	0,100			144	147	10	0,400		
		6	0,220					12	0,273		
71	74	6	0,270			149	152	12	0,299		
		8	0,138					14	0,204		
75	78	6	0,313			154	157	12	0,325		
		8	0,155					14	0,220		
78	81	6	0,333	164	167	12	0,386				
		8	0,168			14	0,256				
83	86	6	0,325	169	172	12	0,430				
		8	0,194			14	0,275				
88	91	6	0,300	174	178	12	0,285				
		8	0,223			14	0,200				
93	96	6	0,240	179	183	12	0,304				
		8	0,148			14	0,210				
103	106	8	0,334	184	188	12	0,325				
		10	0,190			14	0,228				
113	116	8	0,295	194	198	12	0,255				
		10	0,236			14	0,190				
123	126	8	0,294	199	203	12	0,270				
		10	0,185			14	0,200				

Примечания: 1. Материал кольца — стали 60С2А (HRC 44—48), 40ХН2МА (HRC 30—36).

2. Значения δ_{\max} определены из условия, что напряжение $\sigma_{\max} \leq 50$ кгс/мм².

3. Размер b^* назначается конструктором.

Если в опорах не учитывают присоединенные массы, то динамические жесткости опоры равны соответствующим статическим жесткостям

$$K_{д1} = c_1 = \frac{1}{\alpha_1}; \quad K_{д2} = c_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \quad (71)$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты упругой податливости [при выводе формулы (7) принимали $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$].

Для общих случаев, когда рассматривают сложную динамическую систему, коэффициенты динамической жесткости определяют, как указано в гл. 21.

При выводе расчетного уравнения зависимости (36)—(45) справедливы, но вместо условий (46) и (47) будем иметь

$$\omega^2 \int_0^{a_1} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0) a_1 + y(0) = -\frac{R_1}{K_{д1}}; \quad (72)$$

$$\omega^2 \int_0^{a_2} \int_0^{x_1} \frac{A_y(x_2)}{EJ(x_2)} dx_2 dx_1 + y'(0) a_2 + y(0) = -\frac{R_2}{K_{д2}}, \quad (73)$$

где R_1 и R_2 определяют из соотношений (42).

Из равенства (72) и (73) находим величины $y'(0)$ и $y(0)$ и получаем основное расчетное уравнение для ротора на упругих опорах

$$y = \omega^2 [K_y + K_* y], \quad (74)$$

где K_y — определяется формулой (50), а величина $K_* y$, учитывающая податливость опор,

$$K_* y = \frac{1}{(a_2 - a_1)^2} \left\{ -\frac{a_2 - x}{K_{д1}} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)] + \frac{a_1 - x}{K_{д2}} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)] \right\}. \quad (75)$$

Необходимое для расчета значение $y'(x)$ вычисляем из уравнения

$$y' = \omega^2 [K'_y + K'_* y]; \quad (76)$$

значение K'_y находим из равенства (52), а

$$K'_* y = \frac{1}{(a_2 - a_1)^2} \left\{ \frac{1}{K_{д1}} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)] - \frac{1}{K_{д2}} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)] \right\}. \quad (77)$$

Расчет по уравнению (74) ведут методом последовательных приближений.

Если учитывают обычную упругость опор [формулы (71)], то такой расчет не содержит существенных отличий от рассмотренного ранее.

Выбор первого приближения не влияет на окончательные результаты.

В качестве первого приближения можно выбрать

$$y_{(0)}(x) = 1. \quad (78)$$

При учете присоединенных масс величина $K_* y$ зависит от ω^2 , так как в нее входят динамические жесткости опор.

В этом случае условие (33) приводит к алгебраическому уравнению относительно ω^2 .

Пример. Определить критическую частоту вращения ротора нагнетателя при учете упругости опор (см. рис. 12). В соответствии с экспериментальными данными жесткости опор принять

$$K_{д1} = \frac{1}{\alpha_1} = 0,25 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}$$

$$K_{д2} = \frac{1}{\alpha_2} = 0,33 \cdot 10^6 \text{ кгс/см.}$$

Б. Расчет критических частот вращений ротора нагнетателя на упругих опорах

$x, \text{ см}$	$A_{*1} \times 10^3$	$A_{*2} \times 10^3$	$K_{*y} \times 10^6$	$(K_y + K_{*y}) \times 10^6$	$y_{(1)}(x)$	$(K'_y + K'_{*y}) \times 10^6$	$y'_{(1)}(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	456	-43,6	-4,33	-3,97	-0,0556	0,431	0,00603
0,65	430	0	-3,69	-3,69	-0,0517	0,431	0,00603
1,45	399	59,8	-2,90	-3,34	-0,0468	0,441	0,00618
1,75	387	82,2	-2,61	-3,21	-0,0449	0,451	0,00631
2,75	347	157	-1,63	-2,74	-0,0383	0,499	0,00687
3,80	305	235	-0,597	-2,19	-0,0307	0,559	0,00783
4,50	277	288	0,0909	-1,77	-0,0248	0,630	0,00883
4,70	269	302	0,287	-1,65	-0,0231	0,649	0,00908
7,70	149	527	3,23	0,736	0,0103	0,940	0,0132
8,00	138	549	3,53	1,02	0,0143	0,977	0,0137
8,40	122	579	3,92	1,42	0,0200	1,03	0,0144
8,60	114	594	4,12	1,64	0,0229	1,09	0,0152
11,4	0	807	6,92	6,92	0,0669	2,62	0,0367
12,7	-49,8	900	8,14	10,6	0,149	3,31	0,0464
12,9	-57,8	915	8,34	11,3	0,153	3,46	0,0485
14,3	-114	1020	9,72	17,0	0,239	4,74	0,0663
14,5	-122	1030	9,91	18,0	0,252	4,89	0,0685
17,7	-249	1270	13,0	36,4	0,509	6,58	0,0921
18,3	-273	1320	13,6	40,4	0,565	6,72	0,0942
19,1	-305	1380	14,4	45,8	0,641	6,86	0,0961
21,2	-389	1540	16,5	60,3	0,844	6,96	0,0975
22,8	-452	1650	18,1	71,4	1,000	6,94	0,0972

Расчет ведут по уравнению (74). Результаты расчета сведены в табл. 5. В этой таблице дан расчет первого приближения, причем в качестве исходного приближения принята форма прогиба вала на жестких опорах (графа 20, табл. 2).

Для исходного приближения значение K_y уже известно (графа 19, табл. 2) K_{*y} вычисляют по формуле (75). В графах 2 и 3 (см. табл. 5) указывают

$$A_{*1}(x) = \frac{a_2 - x}{K_{d1}} [(l - a_2) A_{1y}(l) - A_{2y}(l)];$$

$$A_{*2}(x) = \frac{a_1 - x}{K_{d2}} [A_{2y}(l) - (l - a_1) A_{1y}(l)].$$

Первое приближение для критической угловой скорости ротора на упругих опорах находим из условия

$$\omega_1^2 = \frac{y_{(0)}}{K_{y(0)} + K_{*y(0)}} \Big|_{x=x_m} = \frac{1}{71,4 \cdot 10^{-6}} = 14 \cdot 10^6 \text{ рад/с}^2,$$

так как наибольшая сумма $K_{y(0)} + K_{*y(0)}$ получается при $x=1$. Значение $\omega_{(1)} = 3740 \text{ рад/с}$ и критическая частота вращения $n_{(1)} = 35 \text{ 700 об/мин}$. Величина $y_{(1)}(x)$ получается из графы 6 делением на наибольшую сумму $K_{y(0)} + K_{*y(0)}$. Значение $K'_{*y(0)}$ известно из предыдущего расчета (графа 21, табл. 2), величина K'_y — по формуле (77).

Сумма указанных величин помещена в графу 7. Разделив эти значения на наибольшую величину $K_{y(0)} + K_{*y(0)}$, равную 71,4 получим $y'_{(1)}(x)$.

Следующие приближения дают $n_{(2)} = 33 \text{ 500 об/мин}$; $n_{(3)} = 33 \text{ 200 об/мин}$.

Вал с равномерно распределенной массой. Рассмотрим частный случай (рис. 16), имеющий практическое значение: вал постоянного сечения, несущий большое число одинаковых дисков.

Эта задача имеет точное решение.

Если m и J_m — масса и момент инерции, приходящиеся на единицу длины вала, то критическая частота i выражается равенством

$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{i^2 \pi^2 J_m}{ml^2}}} \quad (79)$$

($i = 1, 2, 3, 4, \dots$).

Форма прогибов, соответствующая критической угловой скорости, будет

$$y_{(i)} = c \sin \frac{i \pi x}{l}. \quad (80)$$

В равенстве (79)

$$\frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \omega_{0i}, \quad (81)$$

где ω_{0i} — критическая угловая скорость вала без учета гироскопического момента дисков.

Следовательно,

$$\omega_i = \omega_{0i} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{i^2 \pi^2 J_m}{ml^2}}}. \quad (82)$$

Из последнего равенства следует, что влияние гироскопического момента для высших критических угловых скоростей увеличивается.

Наименьшая критическая угловая скорость вала в соответствии с равенством (79) будет

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 J_m}{ml^2}}}. \quad (83)$$

Для вала постоянного сечения без присоединенных масс имеем

$$m = \rho F = \rho \frac{\pi d^2}{4};$$

$$J_m = \frac{1}{2} J_p = \rho \frac{\pi d^4}{64}; \quad J = \frac{\pi d^4}{64},$$

и тогда

$$\omega_1 = \frac{\pi^2 d^2}{4l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 d^2}{16 l^2}}}. \quad (84)$$

Если отношение $\frac{d}{l}$ значительно меньше единицы, то влиянием гироскопического эффекта можно пренебречь и считать

$$\omega_1 = \frac{\pi^2 d}{4l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (85)$$

Влияние начального дисбаланса для ротора с распределенными массами. Уравновешивание по собственным формам. Рассмотрим для простоты системы, для которых можно пренебречь влиянием гироскопических моментов дисков.

При определении критических угловых скоростей использовали интегральное уравнение

$$y = \omega^2 K y. \quad (86)$$

Физический смысл этого уравнения таков: прогибы вала $y(x)$ вызваны распределенными центробежными силами $\omega^2 m(x) y(x)$, в свою очередь, зависящими от прогиба.

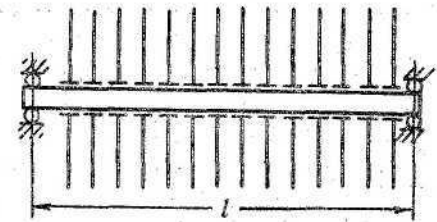


Рис. 16. Вал с дисками

Очевидно, что уравнение (86) имеет решение $y = 0$, которое соответствует прямой форме равновесия (начальный дисбаланс считали отсутствующим).

Однако при некоторых значениях ω , называемых критическими, уравнение (86) обладает отличными от нуля решениями: $y_1(x), y_2(x) \dots$.

Эти решения (с точностью до множителя) и представляют собой формы прогибов при критических скоростях вращения (собственные формы или собственные функции).

Следовательно, собственные формы удовлетворяют уравнениям

$$y_1 = \omega_1^2 K y_1; \quad y_2 = \omega_2^2 K y_2; \quad \dots \quad (87)$$

где ω_1, ω_2 — критические скорости ротора.

Собственные формы $y_1, y_2, y_3 \dots$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^l m y_i y_k dx = 0 \quad (i \neq k), \quad (88)$$

Прогиб y_1 вызывают распределенные силы $\omega_1^2 m y_1$, а прогиб y_k — силы $\omega_k^2 m y_k$. Так как $\omega_i \neq \omega_k$, то отсюда следует условие (88).

Рассмотрим теперь вал, имеющий начальный эксцентриситет расположенных на валу масс $e(x)$.

Тогда прогиб вала $y(x)$ будет вызывать силы

$$\begin{aligned} \omega^2 m(x) [y(x) + e(x)]; \\ y(x) = \omega^2 K (y + e) = \omega^2 K y + \omega^2 K e. \end{aligned} \quad (89)$$

Обозначим $f(x)$ — прогиб вала от распределенных усилий $\omega^2 m(x)e(x)$:

$$f = \omega^2 K e. \quad (90)$$

Тогда уравнение (89) примет вид

$$y = \omega^2 K y + f. \quad (91)$$

Это уравнение выражает прогиб вала при любой угловой скорости ω .

Прогиб $f(x)$ можно представить в виде ряда

$$f = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots \quad (92)$$

Для того чтобы определить коэффициент a_1 , умножаем обе части уравнения на $m y_1$ и интегрируем по всей длине вала

$$\int_0^l m f y_1 dx = a_1 \int_0^l m y_1^2 dx + a_2 \int_0^l m y_1 y_2 dx + a_3 \int_0^l m y_1 y_3 dx + \dots$$

Согласно условию ортогональности все интегралы, содержащие разные собственные формы, обращаются в нуль, но

$$a_1 = \frac{\int_0^l m f y_1 dx}{\int_0^l m y_1^2 dx}.$$

Точно так же найдем

$$a_i = \frac{\int_0^l m f y_i dx}{\int_0^l m y_i^2 dx} \quad (93)$$

Коэффициенты a_i в равенстве (92) называют коэффициентами разложения (прогиба от дисбаланса по собственным формам).

Предположим теперь, что общий прогиб вала y также может быть представлен в виде

$$y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + \dots \quad (94)$$

и требуется определить коэффициенты b_1, b_2, b_3, \dots

Внося значения (94) и (92) в уравнение (91), получим

$$\begin{aligned} b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots = \omega^2 K (b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots) + \\ + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots \end{aligned} \quad (95)$$

Так как величина $K y$ содержит обычные интегральные операции с функцией $y(x)$, то

$$K (b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots) = b_1 K y_1 + b_2 K y_2 + \dots$$

Учитывая, что из соотношений (87)

$$K y_1 = \frac{1}{\omega_1^2} y_1; \quad K y_2 = \frac{1}{\omega_2^2} y_2; \quad \dots,$$

и подставляя эти зависимости в равенство (95), получим

$$\left[b_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) - a_1 \right] y_1 + \left[b_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right) - a_2 \right] y_2 + \dots = 0.$$

Последнее равенство возможно (для всех x) только в том случае, если

$$b_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) - a_1 = 0; \quad b_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right) - a_2 = 0; \quad \dots,$$

откуда

$$b_1 = \frac{a_1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}; \quad b_2 = \frac{a_2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} \dots$$

Внося эти значения в ряд (94), получаем выражение для прогиба вала в рабочих условиях от начального дисбаланса

$$y(x) = \frac{a_1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} y_1(x) + \frac{a_2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}} y_2(x) + \dots \quad (96)$$

Из этой формулы следует: прогибы могут неограниченно возрастать при совпадении угловой скорости вала с одной из критических угловых скоростей;

для устранения прогибов, связанных с данной критической угловой скоростью ω_i , необходимо сделать равным нулю a_i — коэффициент разложения прогиба от дисбаланса по данной форме.

Расположение уравновешенных грузов для устранения вибраций, связанных с первой критической угловой скоростью, показаны на рис. 17.

Формулы (90) и (93) позволяют рассчитать расположение начальных эксцентриситетов $e(x)$ для выполнения условия

$$a_i = 0. \quad (97)$$

Для гибких роторов (т. е. роторов, работающих при $\omega > \omega_1$) обычные методы уравновешивания часто не дают положительных результатов из-за упругих прогибов роторов при рабочих условиях,

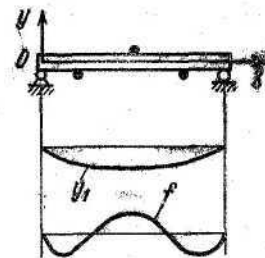
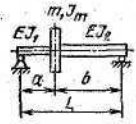
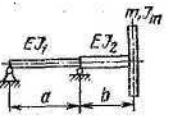
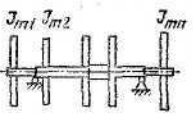


Рис. 17. Расположение уравновешивающих грузов для устранения вибраций, связанных с первой критической угловой скоростью

6. Критические угловые скорости некоторых роторов

Система	Формула	Коэффициенты влияния
Вал с одним диском		
	(15)	$\alpha = \frac{1}{3EJ_1} \frac{a^2 b^2}{l^2} + \frac{1}{3EJ_2} \frac{a^2 b^2}{l^2}$ $\beta = \frac{1}{3EJ_1} \frac{a^3}{l^2} + \frac{1}{3EJ_2} \frac{b^3}{l^2}$ $\nu = \frac{1}{3EJ_2} \frac{ab^2}{l^2} - \frac{1}{3EJ_1} \frac{a^2 b}{l^2}$
	(15)	$\alpha = \frac{1}{3EJ_1} ab^2 + \frac{1}{3EJ_2} b^3$ $\beta = \frac{1}{3EJ_1} a + \frac{1}{EJ_2} b$ $\nu = \frac{1}{3EJ_1} ab + \frac{1}{2EJ_2} b^2$
Вал с несколькими дисками (без учета гироскопического эффекта)		
	$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}$	<p>Примечание: J_1, J_2 — моменты инерции сечения вала; ω_k — первая критическая скорость ротора; $\omega_1, \dots, \omega_n$ — тоже, при наличии l-го диска</p>

Более эффективным оказывается уравновешивание по собственным формам, сущность которого состоит в выполнении условия (97) для нескольких первых критических скоростей. Критические угловые скорости для некоторых роторов приведены в табл. 6.

РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК

КРУГЛЫЕ ПЛАСТИНКИ

Расчетные формулы. Многие детали (например, диски) рассчитывают на изгиб как круглые пластинки постоянной или переменной толщины h , симметрично нагруженные давлением $q(r)$ в кгс/см² или отнесенными к единице длины нагрузками Q_l в кгс/см и моментами M_j в кгс·см/см (рис. 1). В центре сплошной пластинки ($a = 0$) может быть приложена сосредоточенная сила P в кгс.

В сечениях пластинки действуют поперечная сила Q и изгибающие моменты M_r и M_θ (рис. 2). Нормальные напряжения σ_r и σ_θ меняются по толщине пластинки по линейному закону; их максимальные значения у поверхности

$$\sigma_r = \pm \frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_\theta = \pm \frac{6M_\theta}{h^2}, \quad (1)$$

где плюс относится к нижней стороне пластинки.

Из условий равновесия элемента пластинки (рис. 2):

$$\frac{d}{dr}(rQ) = qr; \quad \frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = Qr, \quad (2)$$

и соотношений упругости:

$$M_r = D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right),$$

$$M_\theta = D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (3)$$

получают дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D}, \quad (4)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; ν — коэффициент Пуассона; w — прогибы пластинки (вверх).

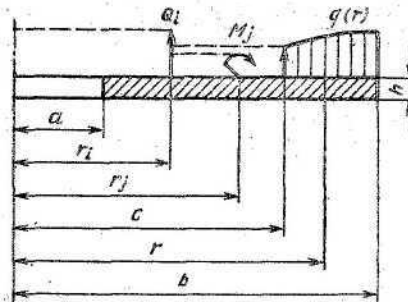


Рис. 1. Нагружение круглой пластинки

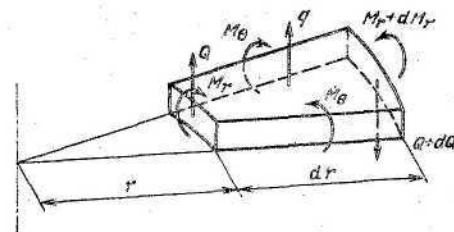


Рис. 2. Поперечная сила Q и изгибающие моменты M_r, M_θ в круглой пластинке